

Численный алгоритм для расчета взаимодействия поверхностных волн с полупогруженными сооружениями в рамках плановой модели мелкой воды

О. И. ГУСЕВ*, Г. С. ХАКИМЗЯНОВ

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий,
630090, Новосибирск, Россия

*Контактный автор: Гусев Олег Игоревич, e-mail: GusevOI@ict.sbras.ru

Поступила 07 апреля 2023 г., доработана 15 июня 2023 г., принята в печать 02 июля 2023 г.

Детально описан алгоритм расчета взаимодействия поверхностных волн с неподвижными полупогруженными в воду сооружениями в рамках плановой бездисперсионной модели мелкой воды. Для численного решения задачи область течения разбивается на внешнюю часть, где решается система уравнений мелкой воды для течения со свободной границей, и внутреннюю область, в которой решается система уравнений несжимаемой жидкости для течения в пространстве между днищем полупогруженного тела и дном акватории. Предложен способ склеивания этих решений. Приведены результаты численного моделирования наката бора и уединенной волны на полупогруженное тело прямоугольного сечения.

Ключевые слова: поверхностные волны, полупогруженное тело, плановая модель мелкой воды, условия сопряжения, разностные схемы, численный алгоритм.

Цитирование: Гусев О.И., Хакимзянов Г.С. Численный алгоритм для расчета взаимодействия поверхностных волн с полупогруженными сооружениями в рамках плановой модели мелкой воды. Вычислительные технологии. 2023; 28(4):73–93. DOI:10.25743/ICT.2023.28.4.007.

Введение

При проектировании больших частично погруженных в воду неподвижных сооружений, размещаемых в цунамиопасных прибрежных водах, необходимо учитывать возможное воздействие на них длинных поверхностных волн типа цунами. В последнее десятилетие активность исследования WSI-задач (wave-structure interaction) о взаимодействии поверхностных волн с полупогруженными конструкциями стремительно растет. Наряду с аналитическими методами и лабораторными экспериментами по определению характеристик взаимодействия стали широко использоваться методы численного моделирования (см. работы [1–6] и приведенную в них библиографию).

Для детального описания трансформации волн в окрестности полупогруженных тел применяются численные методы в рамках трудоемких моделей вязких турбулентных течений жидкости [7–10]. Для практики наиболее важными являются такие характеристики взаимодействия, как максимальный заплеск на грани сооружения и максимальная силовая нагрузка на него при набегании поверхностных волн различной формы.

Эти характеристики могут быть рассчитаны с достаточной точностью в рамках более простых моделей идеальной несжимаемой жидкости, в частности нелинейной модели потенциальных течений со свободной границей [1, 11–13]. Более того, в случае распространения поверхностных волн по нормали к длинным боковым граням сооружения и слабой зависимости параметров течения от одной из горизонтальных координат удовлетворительные результаты решения WSI-задач получаются также и в рамках одномерных моделей мелкой воды [3–6, 14]. Использование менее затратных алгоритмов на основе моделей мелкой воды в случаях, когда они обеспечивают необходимую точность, ведет к существенной экономии вычислительных ресурсов при выполнении многовариантных расчетов.

При применении моделей мелкой воды область течения разбивается на внешнюю часть, где имеет место течение воды со свободной границей и искомыми величинами являются полная глубина и осредненная по толщине жидкого слоя скорость, и внутреннюю область с течением несжимаемой жидкости в пространстве между днищем полупогруженного тела и дном акватории [15, 16]. Во внутренней области искомыми величинами являются давление и вектор скорости. Условия сопряжения [17] позволяют склеивать решения в этих двух областях.

Стимулом для решения WSI-задач в рамках двумерных в горизонтальной плоскости моделей мелкой воды (в русскоязычной литературе такие модели часто называют плановыми) послужила практическая потребность исследования взаимодействия волн с полупогруженными сооружениями в тех случаях, когда существенно проявляется двумерность процесса, например при косом набегании волн, неоднородности рельефа дна или соизмеримости размеров объекта в направлении распространения волны и по ее фронту. Однако разработка численных методов для решения WSI-задач в рамках плановых моделей мелкой воды сильно отстает от уровня развития и обоснования самих моделей. Так, в недавних работах [18–20] приведены и исследованы постановки плановых WSI-задач с разбиением области решения на внешнюю и внутреннюю части, но численные алгоритмы разработаны и применены лишь для случая одной пространственной переменной. Перенос таких алгоритмов на случай плановых уравнений оказался не столь простым, поэтому публикации на эту тему пока отсутствуют.

В настоящей работе описан алгоритм расчета взаимодействия волн с полупогруженным телом в рамках плановой нелинейной (NSWE-) модели мелкой воды, обсуждаются особенности численного моделирования и приведены результаты тестовых расчетов взаимодействия поверхностных волн с полупогруженным телом прямоугольного сечения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим течение несжимаемой невязкой жидкости с плотностью $\rho \equiv \text{const}$ в бассейне с непроницаемыми вертикальными стенками и расположенным в нем полупогруженным неподвижным телом с плоскими боковыми вертикальными гранями. Декартову систему координат Ox_1x_2y с вертикальной осью Oy выберем так, чтобы уравнение свободной поверхности покоящейся жидкости имело вид $y = 0$, а функция $y = -h(\mathbf{x})$ задавала рельеф дна, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ (рис. 1, *a*). Область $\Omega(t)$, занятую жидкостью, представим в виде объединения “внешней” области $\Omega^e(t)$, в которой имеет место течение со свободной границей $y = \eta(\mathbf{x}, t)$, и “внутренней” области $\Omega^i(t)$ с течением жидкости в пространстве между дном акватории и днищем полупогруженного тела $y = d(\mathbf{x})$ ($-h(\mathbf{x}) < d(\mathbf{x}) < 0$).

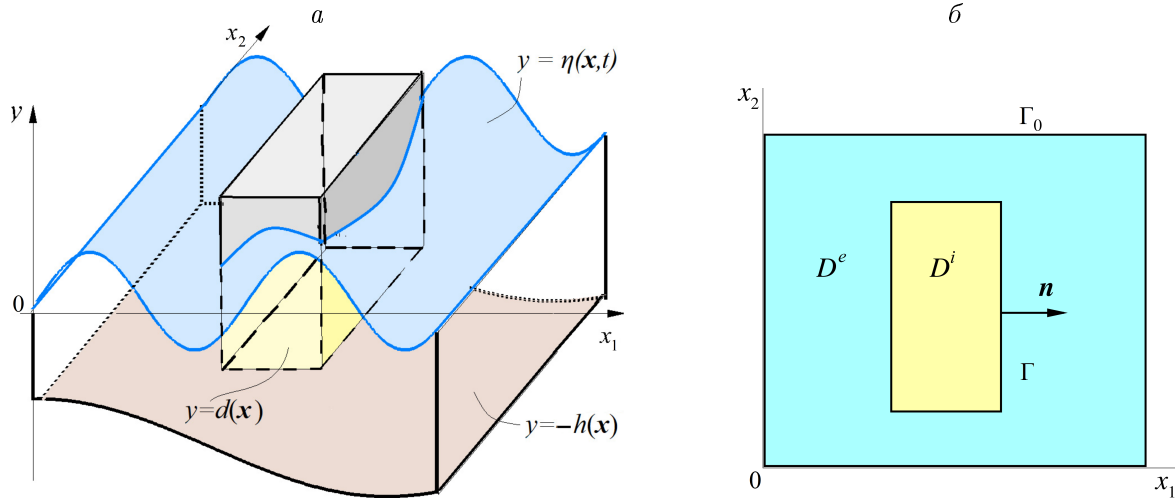


Рис. 1. Схема области течения и обозначения в задаче о взаимодействии поверхностных волн с полупогруженным неподвижным сооружением в трехмерной (а) и плановой (б) постановках

При решении задач в рамках плановых моделей мелкой воды областью течения является проекция \mathcal{D} области $\Omega(t)$ на координатную плоскость Ox_1x_2 . Проекции D^i и D^e трехмерных областей $\Omega^i(t)$ и $\Omega^e(t)$ также будем называть внутренней и внешней областями. Общую границу этих областей обозначим через Γ , а границу области \mathcal{D} — Γ_0 (рис. 1, б).

1.1. Уравнения во внешней области D^e

В области D^e течение моделируется с использованием бездисперсионной NSWЕ-модели

$$H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho H} \nabla p = \frac{1}{\rho H} \check{p} \nabla h, \tag{2}$$

где t — время, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$, \mathbf{u} — осредненная по глубине горизонтальная компонента вектора скорости трехмерного течения, $H(\mathbf{x}, t) = \eta(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x})$ — полная глубина,

$$p = \rho g \frac{H^2}{2}, \quad \check{p} = \rho g H,$$

$g = \text{const}$ — ускорение свободного падения. Искомыми величинами в уравнениях (1), (2) являются полная глубина H и скорость $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Отметим, что уравнение импульса (2) допускает консервативную форму записи

$$(\rho H\mathbf{u})_t + \mathbf{f}^1_{x_1} + \mathbf{f}^2_{x_2} + \nabla p = \check{p} \nabla h, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{f}^1 = \begin{pmatrix} \rho H u_1^2 \\ \rho H u_1 u_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^2 = \begin{pmatrix} \rho H u_1 u_2 \\ \rho H u_2^2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Для системы уравнений (1), (2) задаются начальные условия, краевые условия на границе Γ_0

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \tag{5}$$

где \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к Γ_0 , а также условия сопряжения на Γ и краевое условие

$$\frac{\partial \eta}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{n} — единичная, внешняя по отношению к области \mathcal{D}^i , нормаль к ее границе Γ .

1.2. Уравнения во внутренней области \mathcal{D}^i

Уравнения в области \mathcal{D}^i приближенно описывают трехмерное течение воды между дном бассейна и днищем полупогруженной конструкции [17]:

$$\nabla \cdot (S\mathbf{u}) = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho S} \nabla p = \frac{1}{\rho S} \check{p} \nabla h + \frac{1}{\rho S} \hat{p} \nabla d, \quad (8)$$

где $0 < S(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x})$ — толщина слоя жидкости под телом, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — осредненная по толщине этого слоя горизонтальная компонента скорости трехмерного течения под телом, $p(\mathbf{x}, t)$ — проинтегрированное по толщине слоя давление, функции $\check{p}(\mathbf{x}, t)$ и $\hat{p}(\mathbf{x}, t)$ описывают при $\mathbf{x} \in \mathcal{D}^i$ распределения давления на поверхностях дна и днища тела,

$$\check{p} = \frac{p}{S} + \rho g \frac{S}{2}, \quad \hat{p} = \frac{p}{S} - \rho g \frac{S}{2}. \quad (9)$$

В системе уравнений (7), (8) искомыми величинами являются компоненты вектора скорости \mathbf{u} и давление p . При численном решении используются условия сопряжения на Γ и консервативная форма уравнения движения (8)

$$(\rho S\mathbf{u})_t + \mathbf{f}_{x_1}^1 + \mathbf{f}_{x_2}^2 + \nabla p = \check{p} \nabla h + \hat{p} \nabla d, \quad (10)$$

в которой вектор-функции \mathbf{f}^1 , \mathbf{f}^2 выражаются по формулам (4) с заменой H на S . Учитывая выражения (9), уравнению (10) можно придать следующую форму:

$$(\rho S\mathbf{u})_t + \mathbf{f}_{x_1}^1 + \mathbf{f}_{x_2}^2 + S \nabla \frac{p}{S} = \rho g \frac{S}{2} \nabla (2h - S). \quad (11)$$

1.3. Условия сопряжения

На общей границе Γ областей \mathcal{D}^e и \mathcal{D}^i используются условия сопряжения, которые связывают давление и скорость по разные стороны от Γ . С помощью этих условий можно определить параметры течения с одной стороны от Γ , зная их на противоположной. В первом условии сопряжения

$$\rho S(\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{n}) = \rho H(\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n}) \equiv Q(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

величина $Q(\mathbf{x}, t)$ имеет физический смысл массового расхода жидкости. В этой и приведенных ниже формулах верхние индексы “ e ” и “ i ” означают, что используются значения искомого величин на Γ , предельные со стороны области \mathcal{D}^e и соответственно \mathcal{D}^i .

Второе условие сопряжения постулирует непрерывность касательной составляющей вектора скорости на Γ :

$$(\mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{u}^e \cdot \boldsymbol{\tau}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (13)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — касательный к Γ единичный вектор. В последнем условии сопряжения задаются связи предельных значений давления на Γ :

$$p^i = \rho g S \left(H - \frac{S}{2} \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq 0. \quad (14)$$

2. Численный алгоритм

В общем случае границы Γ_0 и Γ могут быть криволинейными, поэтому в расчетах желательнее применение криволинейных адаптивных сеток. Соответствующий алгоритм будет изложен в отдельной публикации, а здесь рассмотрим случай областей \mathcal{D} и \mathcal{D}^i прямоугольной формы (рис. 1, б). Предполагается, что прямоугольник \mathcal{D} с длинами сторон l_1 и l_2 покрыт прямоугольной равномерной сеткой с шагами $h_1 = l_1/N_1$ и $h_2 = l_2/N_2$ в направлении осей Ox_1 и Ox_2 соответственно и узлами \mathbf{x}_j , где $\mathbf{j} = (j_1, j_2)$ — мультииндекс, $j_1 = 0, \dots, N_1$, $j_2 = 0, \dots, N_2$, $\mathbf{x}_j = (x_{1,j_1}, x_{2,j_2}) = (j_1 h_1, j_2 h_2)$. Внутренняя область \mathcal{D}^i является прямоугольником со сторонами, параллельными осям декартовой системы координат, $\mathcal{D}^i = \{ \mathbf{x} \mid x_{1l} \leq x_1 \leq x_{1r}, x_{2l} \leq x_2 \leq x_{2r} \}$, $0 < x_{1l} < x_{1r} < l_1$, $0 < x_{2l} < x_{2r} < l_2$. Также предполагается, что стороны внутренней области — стороны прямоугольника \mathcal{D}^i — лежат на координатных линиях сетки, т. е. $x_{1l} = j_{1l} h_1$, $x_{1r} = j_{1r} h_1$, $x_{2l} = j_{2l} h_2$, $x_{2r} = j_{2r} h_2$, где $0 < j_{1l} < j_{1r} < N_1$, $0 < j_{2l} < j_{2r} < N_2$. Совокупность внутренних узлов сетки, лежащих в \mathcal{D}^e , обозначим как \mathcal{D}_h^e , лежащих во внутренней области \mathcal{D}^i — как \mathcal{D}_h^i , на Γ — как Γ_h . Совокупность центров ячеек внутренней области обозначим как $\mathcal{D}_h^{i,0}$, внешней — как $\mathcal{D}_h^{e,0}$.

Далее представим алгоритм расчета величин на $(n + 1)$ -м слое по времени $t^{n+1} = t^n + \tau$, считая, что на n -м слое t^n эти величины известны во всех узлах их области определения. Так, во внешней области известны значения скорости \mathbf{u}_j^n и полной глубины H_j^n в узлах \mathbf{x}_j , во внутренней области \mathcal{D}^i в узлах \mathbf{x}_j известны значения давления p_j^n , а в центрах ячеек — скорости $\mathbf{u}_{j+1/2}^n$, где $\mathbf{j} + 1/2 = (j_1 + 1/2, j_2 + 1/2)$.

Для определения величин \mathbf{u}_j^{n+1} , H_j^{n+1} во внешней области используется схема предиктор-корректор. Эта схема подробно описана в [21, 22], поэтому здесь лишь отметим, что предикторные величины $\mathbf{u}_{j+1/2}^*$ и $H_{j+1/2}^*$ вычисляются в центрах ячеек (рис. 2) на основе аппроксимаций уравнения неразрывности (1) и уравнения движения (2). Центр ячейки $\mathbf{x}_{j+1/2} \in \mathcal{D}_h^{e,0}$ во внешней области имеет координаты $(x_{1,j_1} + h_1/2, x_{2,j_2} + h_2/2)$, где $j_1 = 0, \dots, N_1 - 1$, а индекс j_2 принимает значения $j_2 = 0, \dots, N_2 - 1$ при $j_1 \leq j_{1l} - 1$ и $j_1 \geq j_{1r}$

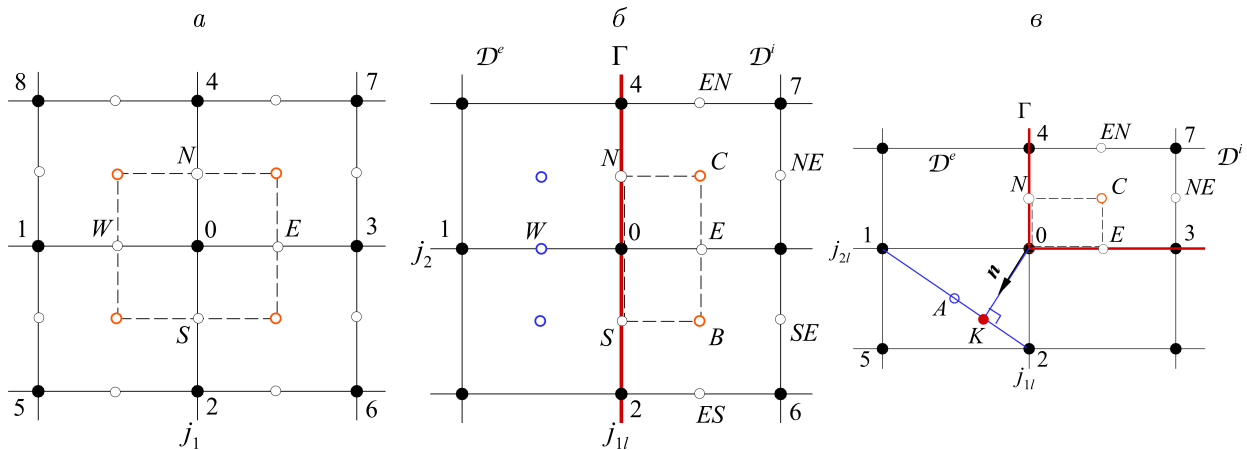


Рис. 2. Обозначения для центров и середин сторон ячеек прямоугольной равномерной сетки и локальная нумерация узлов при $\mathbf{x}_j \in \mathcal{D}_h^e \cup \mathcal{D}_h^i$ (а), $\mathbf{x}_j \in \Gamma_h$ (б, в) при: б — $j_1 = j_{1l}$, $j_{2l} < j_2 < j_{2r}$; в — $j_1 = j_{1l}$, $j_2 = j_{2l}$

Fig. 2. Notation for the centers and midpoints of the cells sides of a rectangular uniform grid and local numbering of the nodes at $\mathbf{x}_j \in \mathcal{D}_h^e \cup \mathcal{D}_h^i$ (а), $\mathbf{x}_j \in \Gamma_h$ (б, в) at: б — $j_1 = j_{1l}$, $j_{2l} < j_2 < j_{2r}$; в — $j_1 = j_{1l}$, $j_2 = j_{2l}$

и значения $j_2 = 0, \dots, j_{2l} - 1, j_{2r}, \dots, N_2 - 1$ при $j_{1l} \leq j_1 \leq j_{1r} - 1$. На шаге корректор используется аппроксимация уравнений (1) и (3) во внутренних узлах $\mathbf{x}_j \in \mathcal{D}_h^e$.

Шаг корректор во внешней области завершается вычислением предельных значений полной глубины $H_j^{n+1} = \eta_j^{n+1} + h_j$, касательной $(\mathbf{u}^e \cdot \boldsymbol{\tau})_j$ и нормальной $(\mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n})_j$ составляющих вектора скорости в граничных узлах $\mathbf{x}_j \in \Gamma_h$. Покажем здесь, как вычисляются значения $\eta_j^{n+1}|_{\Gamma_h}$. Пояснения о вычислении компонент вектора скорости $\mathbf{u}^{e,n+1}|_{\Gamma_h}$ будут даны в следующих разделах.

Для вычисления значений η_j^{n+1} применяется аппроксимация краевого условия (6). Например, в узлах левой стороны внутренней области \mathcal{D}^i , не совпадающих с углами (рис. 2, б), полагаем

$$\eta_0^{n+1} = \eta_W^{n+1}, \quad (j_1 = j_{1l}, j_2 = j_{2l} + 1, \dots, j_{2r} - 1), \quad (15)$$

где $\eta_W^{n+1} = (\eta_0^{n+1} + \eta_1^{n+1})/2$ — отклонение свободной границы в середине W горизонтальной стороны ячейки. Здесь и далее для сокращения записи разностных уравнений используются обозначения, указанные на рис. 2, согласно которым узлу \mathbf{x}_{j_1, j_2} присвоен локальный номер 0, узлу \mathbf{x}_{j_1-1, j_2} — 1, середина отрезка, соединяющего узлы \mathbf{x}_{j_1, j_2} и \mathbf{x}_{j_1-1, j_2} , обозначена буквой W , центр ячейки $\mathbf{x}_{j_1+1/2, j_2+1/2}$ — буквой C и т. д. Заметим, что условие (15) можно записать в другой эквивалентной форме: $\eta_0^{n+1} = \eta_1^{n+1}$.

В угловых узлах понятие нормали не имеет смысла, поэтому при аппроксимации краевого условия (6) используется внешняя “квазинормаль” \mathbf{n} , определение которой поясним на примере углового узла $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}_{j_{1l}, j_{2l}} \in \Gamma_h$ (рис. 2, в). Этот узел является вершиной прямоугольной ячейки с центром $\mathbf{x}_{j_{1l}-1/2, j_{2l}-1/2}$. Полагается, что “квазинормаль” ортогональна диагонали, соединяющей узлы \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , и для (6) используется аппроксимация

$$\eta_0^{n+1} = \eta_K^{n+1}, \quad (j_1 = j_{1l}, j_2 = j_{2l}), \quad (16)$$

где K — основание перпендикуляра, опущенного на указанную диагональ из точки \mathbf{x}_0 . Значение η_K^{n+1} вычисляется с помощью билинейной интерполяции значений η^{n+1} в вершинах рассматриваемой ячейки

$$\begin{aligned} \eta^{n+1}(\mathbf{q}) = & \eta_5^{n+1} + \left(1 + \frac{q_1}{h_1}\right) (\eta_2^{n+1} - \eta_5^{n+1}) + \left(1 + \frac{q_2}{h_2}\right) (\eta_1^{n+1} - \eta_5^{n+1}) + \\ & + \left(1 + \frac{q_1}{h_1}\right) \left(1 + \frac{q_2}{h_2}\right) (\eta_0^{n+1} - \eta_1^{n+1} - \eta_2^{n+1} + \eta_5^{n+1}), \end{aligned} \quad (17)$$

где q_1, q_2 — локальные координаты, $q_1 = x_1 - x_{1l}$, $q_2 = x_2 - x_{2l}$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$. Точка K имеет локальные координаты

$$K = \left(-h_1 \frac{h_2^2}{\bar{h}^2}, -h_2 \frac{h_1^2}{\bar{h}^2}\right), \quad \bar{h} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2},$$

поэтому

$$\eta_K^{n+1} = \frac{\eta_1^{n+1} + \zeta^2 \eta_0^{n+1} + \zeta^2 \eta_5^{n+1} + \zeta^4 \eta_2^{n+1}}{(1 + \zeta^2)^2},$$

где $\zeta = h_1/h_2$ — отношение шагов сетки. Тогда с учетом равенства (16) получаем следующую формулу для граничного значения сеточной функции η в угловом узле:

$$\eta_0^{n+1} = \frac{\eta_1^{n+1} + \zeta^2 \eta_5^{n+1} + \zeta^4 \eta_2^{n+1}}{1 + \zeta^2 + \zeta^4}. \quad (18)$$

Формулы для вычисления значений η в других угловых узлах приведены в Приложении.

Алгоритм расчета течения во внутренней области основан на схеме Мак-Кормака. Однако, в отличие от стандартной схемы, как на шаге предиктор, так и на корректоре производится расщепление по физическим процессам: вначале решается уравнение движения с исключенным давлением, затем решается задача Дирихле для уравнения Пуассона относительно давления и на последнем этапе вновь решается уравнение движения с градиентом найденного давления, но без конвективных членов. Правая часть уравнения Пуассона, выбранная специальным образом [23, 24], гарантирует точное выполнение уравнения неразрывности.

2.1. Шаг предиктор во внутренней области

Более подробно остановимся на описании алгоритма для вычисления величин p_j^{n+1} , $\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1}$ во внутренней области, где используется аналог схемы Мак-Кормака. Пусть на n -м слое по времени скорость $\mathbf{u}_{j+1/2}^n$ и давление p_j^n известны и выполняется разностный аналог уравнения неразрывности (7):

$$\nabla_h \cdot (S\mathbf{u}^n)_j = 0. \quad (19)$$

В этом уравнении разностный оператор дивергенции ∇_h , действующий на произвольную сеточную вектор-функцию $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ с областью определения $\mathcal{D}_h^{i,0}$, задан в узлах сетки \mathcal{D}_h^i ($j_\alpha = j_{\alpha l} + 1, \dots, j_{\alpha r} - 1$, $\alpha = 1, 2$) по следующей формуле:

$$\nabla_h \cdot \mathbf{v}_j = \frac{v_{1,B} + v_{1,C} - v_{1,A} - v_{1,D}}{2h_1} + \frac{v_{2,D} + v_{2,C} - v_{2,A} - v_{2,B}}{2h_2}. \quad (20)$$

Шаг предиктор начинается с расчета предварительных значений вектора скорости в центрах всех ячеек внутренней области. Далее эти значения подправляются так, чтобы выполнялось уравнение неразрывности (19). Предварительные значения $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^*$ получаются из разностных уравнений, аппроксимирующих уравнение движения (11) с исключенным давлением и нулевой правой частью, т. е. аппроксимирующих уравнение

$$\rho S\mathbf{u}_t + \mathbf{f}_{x_1}^1 + \mathbf{f}_{x_2}^2 = 0, \quad (21)$$

где учтена независимость функции $S(\mathbf{x})$ от времени. Аппроксимации имеют следующий вид:

$$\rho S_{j+1/2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^* - \mathbf{u}_{j+1/2}^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^{1,n} - \mathbf{f}_{j_1-1/2, j_2+1/2}^{1,n}}{h_1} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^{2,n} - \mathbf{f}_{j_1+1/2, j_2-1/2}^{2,n}}{h_2} = 0. \quad (22)$$

Эти аппроксимации выписаны для центров ячеек при $j_\alpha = j_{\alpha l} + 1, \dots, j_{\alpha r} - 1$. Аппроксимации принимают другой вид в приграничных ячейках, примыкающих к левой и нижним сторонам прямоугольника \mathcal{D}^i :

- ячейках, примыкающих к левой стороне, кроме ячейки в нижнем левом углу прямоугольника \mathcal{D}^i ($j_1 = j_{1l}$, $j_2 = j_{2l} + 1, \dots, j_{2r} - 1$):

$$\rho S_{j+1/2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^* - \mathbf{u}_{j+1/2}^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^{1,n} - \mathbf{f}_{j_1, j_2+1/2}^{1,n}}{h_1/2} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^{2,n} - \mathbf{f}_{j_1+1/2, j_2-1/2}^{2,n}}{h_2} = 0, \quad (23)$$

- ячейках, примыкающих к нижней стороне, кроме ячейки в нижнем левом углу прямоугольника \mathcal{D}^i ($j_1 = j_{1l} + 1, \dots, j_{1r} - 1$, $j_2 = j_{2l}$):

$$\rho S_{j+1/2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^* - \mathbf{u}_{j+1/2}^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^{1,n} - \mathbf{f}_{j_1-1/2, j_2+1/2}^{1,n}}{h_1} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^{2,n} - \mathbf{f}_{j_1+1/2, j_2}^{2,n}}{h_2/2} = 0, \quad (24)$$

– ячейке в нижнем левом углу прямоугольника \mathcal{D}^i ($j_1 = j_{1l}$, $j_2 = j_{2l}$):

$$\rho S_{j+1/2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^* - \mathbf{u}_{j+1/2}^n}{\tau} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^{1,n} - \mathbf{f}_{j_1, j_2+1/2}^{1,n}}{h_1/2} + \frac{\mathbf{f}_{j+1/2}^{2,n} - \mathbf{f}_{j_1+1/2, j_2}^{2,n}}{h_2/2} = 0. \quad (25)$$

В вычислениях по формулам (23)–(25) используются известные компоненты вектора скорости $u_1^{i,n}$, $u_2^{i,n}$ с n -го слоя по времени — предельные со стороны внутренней области \mathcal{D}^i на левой и нижней ее сторонах. Значения скорости $\mathbf{u}_{j_1, j_2+1/2}^{i,n}$, $\mathbf{u}_{j_1+1/2, j_2}^{i,n}$ относятся к центрам сторон приграничных ячеек и определяются как среднее значений в концах этих сторон.

После того как по формулам (22)–(25) величины $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^*$ будут определены в центрах всех ячеек внутренней области, вычисляется функция $P = p/\rho S$, связанная с давлением во внутренних целочисленных узлах. Для этого решается разностная задача Дирихле для следующего разностного уравнения:

$$L_h P_{\mathbf{j}} = F_{\mathbf{j}}, \quad j_\alpha = j_{\alpha l} + 1, \dots, j_{\alpha r} - 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad (26)$$

где

$$F_{\mathbf{j}} = \frac{1}{\tau} \nabla_h \cdot (S \tilde{\mathbf{u}}^*)_{\mathbf{j}} + g L_h (h - S/2)_{\mathbf{j}},$$

оператор L_h задается для произвольной функции $\varphi_{\mathbf{j}}$ формулой

$$L_h \varphi_{\mathbf{j}} = \nabla_h \cdot (S \nabla_h \varphi)_{\mathbf{j}},$$

а для градиента $\nabla_h \varphi$ в центре ячейки используется выражение

$$\nabla_h \varphi_C = \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_7 - \varphi_0 - \varphi_4}{2h_1}, \frac{\varphi_4 + \varphi_7 - \varphi_0 - \varphi_3}{2h_2} \right). \quad (27)$$

Отметим, что если разностное уравнение (26) умножить на $h_1 h_2$, то получим уравнение

$$\left(\sum_{k=0}^8 \beta_k P_k \right)_{\mathbf{j}} = h_1 h_2 F_{\mathbf{j}} \quad (28)$$

на девятиточечном шаблоне, состоящем из узлов с локальными номерами $k = 0, \dots, 8$ (рис. 2, а). Согласно определениям (20) и (27) коэффициенты β_k ($k = 0, \dots, 8$) уравнений (28) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -(S_A + S_D)\xi, & \beta_2 &= (S_A + S_B)\xi, & \beta_3 &= -(S_B + S_C)\xi, & \beta_4 &= (S_D + S_C)\xi, \\ \beta_5 &= S_A \zeta, & \beta_6 &= S_B \zeta, & \beta_7 &= S_C \zeta, & \beta_8 &= S_D \zeta, \\ \beta_0 &= -\sum_{k=1}^8 \beta_k = -\sum_{k=5}^8 \beta_k, \end{aligned}$$

где

$$\xi = \frac{h_1}{4h_2} - \frac{h_2}{4h_1}, \quad \zeta = \frac{h_1}{4h_2} + \frac{h_2}{4h_1}.$$

Граничные значения сеточной функции P , необходимые для решения системы уравнений (28), определяются на основе условия сопряжения (14) с использованием вычисленных по формулам вида (15), (18) значений η^{n+1} на гранях тела:

$$P_{\mathbf{j}} = g \left(H_{\mathbf{j}}^{n+1} - \frac{1}{2} S_{\mathbf{j}} \right), \quad \mathbf{x}_{\mathbf{j}} \in \Gamma_h. \quad (29)$$

На последнем этапе шага предиктор предварительные значения вектора скорости $\tilde{\mathbf{u}}^*$ заменяются на окончательные \mathbf{u}^* :

$$\frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* - \tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^*}{\tau} + \nabla_h P_{j+1/2} = g \nabla_h (h - S/2)_{j+1/2}, \quad j_\alpha = j_{\alpha l}, \dots, j_{\alpha r} - 1.$$

2.2. Шаг корректор во внутренней области

На шаге корректор вначале вычисляются предварительные значения вектора скорости $\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1}$ в центрах ячеек внутренней области. Для ячеек, не примыкающих к правой и верхней сторонам области \mathcal{D}^i , используются аппроксимационные формулы

$$\rho S_{j+1/2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1} - \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* + \mathbf{u}_{j+1/2}^n}{2}}{\tau/2} + \frac{\mathbf{f}_{j_1+3/2, j_2+1/2}^{1,*} - \mathbf{f}_{j+1/2}^{1,*}}{h_1} + \frac{\mathbf{f}_{j_1+1/2, j_2+3/2}^{2,*} - \mathbf{f}_{j+1/2}^{2,*}}{h_2} = 0,$$

где $j_\alpha = j_{\alpha l}, \dots, j_{\alpha r} - 2$, $\mathbf{f}^{\alpha,*} = \mathbf{f}^\alpha(\mathbf{u}^*)$. Для приграничных ячеек около правой стороны области \mathcal{D}^i ($j_1 = j_{1r} - 1$, $j_2 = j_{2l}, \dots, j_{2r} - 2$) аппроксимация уравнения (21) принимает следующий вид:

$$\rho S_{j+1/2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1} - \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* + \mathbf{u}_{j+1/2}^n}{2}}{\tau/2} + \frac{\mathbf{f}_{j_{1r}, j_2+1/2}^{1,*} - \mathbf{f}_{j+1/2}^{1,*}}{h_1/2} + \frac{\mathbf{f}_{j_1+1/2, j_2+3/2}^{2,*} - \mathbf{f}_{j+1/2}^{2,*}}{h_2} = 0. \quad (30)$$

Аналогичные разностные уравнения имеем при $j_1 = j_{1l}, \dots, j_{1r} - 2$, $j_2 = j_{2r} - 1$

$$\rho S_{j+1/2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1} - \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* + \mathbf{u}_{j+1/2}^n}{2}}{\tau/2} + \frac{\mathbf{f}_{j_1+3/2, j_2+1/2}^{1,*} - \mathbf{f}_{j+1/2}^{1,*}}{h_1} + \frac{\mathbf{f}_{j_1+1/2, j_{2r}}^{2,*} - \mathbf{f}_{j+1/2}^{2,*}}{h_2/2} = 0 \quad (31)$$

и в правой верхней ячейке прямоугольника \mathcal{D}^i ($j_1 = j_{1r} - 1$, $j_2 = j_{2r} - 1$)

$$\rho S_{j+1/2} \frac{\tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1} - \frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^* + \mathbf{u}_{j+1/2}^n}{2}}{\tau/2} + \frac{\mathbf{f}_{j_{1r}, j_2+1/2}^{1,*} - \mathbf{f}_{j+1/2}^{1,*}}{h_1/2} + \frac{\mathbf{f}_{j_1+1/2, j_{2r}}^{2,*} - \mathbf{f}_{j+1/2}^{2,*}}{h_2/2} = 0. \quad (32)$$

Для вычислений по формулам (30)–(32) необходимо знать граничные значения компонент $(u_\alpha^{i,*})_{j_{1r}, j_2+1/2}$ ($j_2 = j_{2l}, \dots, j_{2r} - 1$) и $(u_\alpha^{i,*})_{j_1+1/2, j_{2r}}$ ($j_1 = j_{1l}, \dots, j_{1r} - 1$) вектора скорости с шага предиктор. Алгоритм вычисления этих компонент такой же, как для компонент вектора скорости $\mathbf{u}^{i,n+1}$ на шаге корректор (см. подразд. 2.3).

Далее на шаге корректор решается разностная задача Дирихле (26), (29) с новой правой частью уравнения (26)

$$F_{\mathbf{j}} = \frac{2}{\tau} \nabla_h \cdot (S \tilde{\mathbf{u}}^{n+1})_{\mathbf{j}} + g L_h (h - S/2)_{\mathbf{j}}$$

и определяется вектор скорости \mathbf{u}^{n+1} :

$$\frac{\mathbf{u}_{j+1/2}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{j+1/2}^{n+1}}{\tau/2} + \nabla_h P_{j+1/2} = g \nabla_h (h - S/2)_{j+1/2}, \quad j_\alpha = j_{\alpha l}, \dots, j_{\alpha r} - 1.$$

Полученное поле вектора скорости удовлетворяет уравнению неразрывности в каждом внутреннем узле сетки, покрывающей область \mathcal{D}^i :

$$\nabla_h \cdot (S \mathbf{u}^{n+1})_{\mathbf{j}} = 0, \quad \mathbf{x}_{\mathbf{j}} \in \mathcal{D}_h^i. \quad (33)$$

2.3. Алгоритм вычисления компонент скорости в граничных узлах Γ_h

Для завершения вычислений на $(n+1)$ -м слое по времени необходимо определить предельные со стороны внешней и внутренней областей значения компонент вектора скорости во всех узлах общей границы Γ_h . Алгоритм вычисления этих компонент продемонстрируем на примерах левой стороны и левого нижнего угла прямоугольника \mathcal{D}^i (рис. 2, б, в).

Искомые компоненты $u_{1,j}^{e,n+1}$, $u_{1,j}^{i,n+1}$, $u_{2,j}^{e,n+1}$, $u_{2,j}^{i,n+1}$ определяются как решение уравнений, следующих из условий сопряжения (12), (13). В узлах $\mathbf{x}_j \in \Gamma_h$ ($j_1 = j_{1l}$, $j_2 = j_{2l} + 1, \dots, j_{2r} - 1$), не совпадающих с углами прямоугольника \mathcal{D}^i , будем использовать уравнения

$$-(Hu_1^e)_j^{n+1} = -(Su_1^{i,n+1})_j = Q_j, \quad (34)$$

$$u_{2,j}^{e,n+1} = u_{2,j}^{i,n+1} = T_j \quad (35)$$

с известными правыми частями. Здесь массовый расход Q_j вычисляется с помощью уравнения неразрывности (33) в рассматриваемом граничном узле, для которого (рис. 2, б)

$$\nabla_h \cdot (S\mathbf{u}^{n+1})_j = \frac{(Su_1^{n+1})_B + (Su_1^{n+1})_C}{2} + Q_j + \frac{(Su_2^{n+1})_C - (Su_2^{n+1})_B}{h_2}.$$

Касательная составляющая зависит от направления потока:

$$T_j = \begin{cases} (u_2^{n+1})_{j_1-1, j_2}, & \text{если } Q_j \leq 0, \\ \frac{(u_2^{n+1})_B + (u_2^{n+1})_C}{2}, & \text{если } Q_j > 0. \end{cases} \quad (36)$$

В угловом узле $\mathbf{x}_j \in \Gamma_h$ ($\mathbf{j} = (j_{1l}, j_{2l})$) также используются условия сопряжения (12), (13), при этом аналогами (34), (35) будут уравнения

$$(H\mathbf{u}^e)_j^{n+1} \cdot \mathbf{n} = (S\mathbf{u}^{i,n+1})_j \cdot \mathbf{n} = Q_j, \quad (37)$$

$$\mathbf{u}_j^{e,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{u}_j^{i,n+1} \cdot \boldsymbol{\tau} = T_j, \quad (38)$$

где \mathbf{n} — “квазинормаль”, $\boldsymbol{\tau}$ — “касательный” вектор в рассматриваемом угловом узле \mathbf{x}_j :

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2) = \left(-\frac{h_2}{h}, -\frac{h_1}{h} \right), \quad \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2) = \left(\frac{h_1}{h}, -\frac{h_2}{h} \right). \quad (39)$$

Правые части уравнений (37), (38) известны, поскольку они вычисляются с помощью найденных на $(n+1)$ -м временном слое величин. Приведем соответствующие формулы. Уравнение неразрывности (33) в угловом узле $\mathbf{x}_j \in \Gamma_h$, умноженное на площадь $h_1 h_2 / 4$ ячейки, граница которой изображена на рис. 2, в штриховой линией $OECN$, примет вид

$$(Su_1^{n+1})_C \frac{h_2}{2} - (Su_1^{i,n+1})_j \frac{h_2}{2} + (Su_2^{n+1})_C \frac{h_1}{2} - (Su_2^{i,n+1})_j \frac{h_1}{2} = 0.$$

Отсюда, учитывая обозначения (39), для компонент скорости получаем первое уравнение

$$(Su_1^{i,n+1})_j n_1 + (Su_2^{i,n+1})_j n_2 = Q_j, \quad (40)$$

при этом расход $Q_j = (Su_1^{n+1})_{Cn_1} + (Su_2^{n+1})_{Cn_2}$ вычисляется с использованием нормальной компоненты вектора скорости в центре угловой ячейки внутренней области. Из (37) для компонент скорости в угловом узле следует второе уравнение

$$(Hu_1^e)_j^{n+1}n_1 + (Hu_2^e)_j^{n+1}n_2 = Q_j. \quad (41)$$

Из условия (38) для определения компонент вектора скорости получаем еще два уравнения

$$\begin{aligned} u_{1,j}^{i,n+1}\tau_1 + u_{2,j}^{i,n+1}\tau_2 &= T_j, \\ u_{1,j}^{e,n+1}\tau_1 + u_{2,j}^{e,n+1}\tau_2 &= T_j, \end{aligned} \quad (42)$$

где в зависимости от направления потока в качестве T_j берется касательная составляющая вектора скорости либо в точке K внешней области (вычисляется с применением формулы билинейной интерполяции вида (17) и аналога формулы (18)), либо в центре C угловой ячейки внутренней области (используются обозначения рис. 2, в):

$$T_j = \begin{cases} \frac{(\mathbf{u}_1^{n+1} + \zeta^2\mathbf{u}_5^{n+1} + \zeta^4\mathbf{u}_2^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\tau}}{1 + \zeta^2 + \zeta^4}, & \text{если } Q_j \leq 0, \\ (u_1^{n+1})_C\tau_1 + (u_2^{n+1})_C\tau_2, & \text{если } Q_j > 0. \end{cases} \quad (43)$$

Легко показать, что система уравнений (40)–(42) имеет единственное решение

$$u_{1,j}^{i,n+1} = -n_2T_j + n_1\frac{Q_j}{S_j}, \quad u_{2,j}^{i,n+1} = n_1T_j + n_2\frac{Q_j}{S_j}, \quad (44)$$

$$u_{1,j}^{e,n+1} = -n_2T_j + n_1\frac{Q_j}{H_j^{n+1}}, \quad u_{2,j}^{e,n+1} = n_1T_j + n_2\frac{Q_j}{H_j^{n+1}}. \quad (45)$$

Расчетные формулы для других угловых узлов приведены в Приложении.

В том случае, когда конструкция установлена на дно акватории ($S(x) \equiv 0$), расчет во внутренней области не выполняется, а условие сопряжения (12) на границе Γ заменяется на условие непротекания. Тогда при вычислении компонент вектора скорости $\mathbf{u}_j^{e,n+1}$ можно воспользоваться формулами (34)–(36), (43), (45), в которых следует положить $Q_j = 0$. При этом формула (18) не изменяется.

3. Результаты тестирования

Описанный выше численный алгоритм является новым, поэтому он нуждается в тщательном тестировании и исследовании его свойств. В настоящем разделе приведены результаты тестирования на двух задачах, в первой из которых волны имеют однонаправленное движение, но для решения используется разработанный 2D-алгоритм расчета двумерных течений, во второй задаче течение является существенно двумерным. В обеих задачах предполагается горизонтальность как дна бассейна, так и днища тела:

$$h(\mathbf{x}) \equiv h_0 = \text{const} > 0, \quad d(\mathbf{x}) \equiv d_0 = \text{const}, \quad -h_0 < d_0 < 0, \quad S(\mathbf{x}) \equiv S_0 = h_0 + d_0. \quad (46)$$

3.1. Накат бора на полупогруженное тело

Приведем некоторые результаты решения двумерной задачи, когда течение фактически одномерное. Цель экспериментов заключалась в исследовании возможных “паразитических” двумерных эффектов, вносимых 2D-алгоритмом в одномерное течение: течение вдоль оси Ox_2 , которого не должно быть.

В рассматриваемой задаче полупогруженное тело прямоугольного сечения перекрывало бассейн так, что его боковые грани, параллельные оси Ox_1 , соприкасались без зазоров со стенками бассейна. Таким образом, по сравнению со случаем, изображенным на рис. 1, б, теперь точки горизонтальных боковых сторон границы Γ внутренней области $\mathcal{D}^i = [x_{1l}, x_{1r}] \times [x_{2l}, x_{2r}]$ имеют одинаковые ординаты с точками на соответствующих частях границы Γ_0 внешней области: $x_{2l} = 0$, $x_{2r} = l_2$.

Начальная волна в момент времени $t = 0$ имеет вертикальный передний фронт, параллельный оси Ox_2 , и до начала взаимодействия с телом распространяется по покоящейся перед ней водой в виде бора постоянной высоты:

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} a_0, & x_1 \leq x_b(t), \\ 0, & x_1 > x_b(t), \end{cases} \quad u_1(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{a_0 c_0}{a_0 + h_0}, & x_1 \leq x_b(t), \\ 0, & x_1 > x_b(t), \end{cases} \quad u_2(\mathbf{x}, t) \equiv 0, \quad (47)$$

где $0 < a_0$ — высота бора, $x_b(t) = x_1^0 + c_0 t$, $x_1 = x_1^0$ — начальное положение фронта бора, $0 < x_1^0 < x_{1l}$, $0 < c_0$ — скорость его движения,

$$c_0 = \sqrt{g \frac{(2h_0 + a_0)(h_0 + a_0)}{2h_0}}.$$

Для рассматриваемой задачи несколько изменится постановка, приведенная в разд. 1: на левой границе $x_1 = 0$ внешней области вместо краевых условий (5) используются вектор скорости и отклонение свободной границы, вычисленные по формулам (47); краевое условие (6) и условия сопряжения (12)–(14) ставятся только на левой и правой сторонах ($x_1 = x_{1l}$, $x_1 = x_{1r}$) контура Γ , а на его нижней и верхней сторонах ($x_2 = 0$, $x_2 = l_2$) задается условие непротекания $u_2 = 0$. Решение такой задачи соответствует одномерному (не зависящему от второй горизонтальной координаты x_2) течению вдоль оси Ox_1 . Изменения в постановке задачи приводят и к некоторым изменениям в 2D-алгоритме. Так, заплески на грани тела вычисляются теперь только в узлах на левой и правой сторонах контура Γ по формулам вида (15) при $j_2 = 0, \dots, N_2$. И только в таких узлах вычисляются граничные значения давления (29). В узлах \mathbf{x}_j ($j_1 = j_{1l} + 1, \dots, j_{1r} - 1$, $j_2 = j_{2l} = 0$, $j_2 = j_{2r} = N_2$), принадлежащих нижней и верхней сторонам контура Γ , вместо разностного условия Дирихле (29) используется специальная разностная аппроксимация [2] условия Неймана $\partial P / \partial x_2 = 0$, которое следует из условия непротекания и предположений (46). Условие непротекания приводит также к нулевым значениям потоков $\mathbf{f}_{j_1+1/2, j_2}^{2,n}$ в формулах (24), (25) и $\mathbf{f}_{j_1+1/2, j_{2r}}^{2,*}$ — в (31), (32).

На рис. 3 сплошными линиями изображены профили свободной границы как функции переменной $x = x_1$, рассчитанные с помощью 2D-алгоритма на квадратной сетке с шагом $h_0/40$ при следующих значениях параметров:

$$l_1 = 50h_0, \quad l_2 = x_{2r} = 10h_0, \quad x_{1l} = 20h_0, \quad x_{1r} = 30h_0, \quad d_0 = -0.5h_0, \quad a_0 = 0.2h_0, \quad x_1^0 = 10h_0.$$

Профили получены в сечении $x_2 = 0$, и они совпадают с профилями свободной границы $y = \eta(x, x_2, t)$ в любом другом сечении $x_2 = \text{const} > 0$, т. е. 2D-алгоритм не генерирует “численную двумерность” в течении, которое по условиям задачи должно быть одномерным.

На рис. 3 показаны также профили свободной границы $y = \eta(x, t)$ (штриховые линии), полученные при решении рассматриваемой задачи в рамках 1DNSWE-модели мелкой воды в одномерном приближении [3] и рассчитанные с помощью хорошо верифицированного 1D-алгоритма [4–6]. Видно, что как при распространении бора (линии 2),

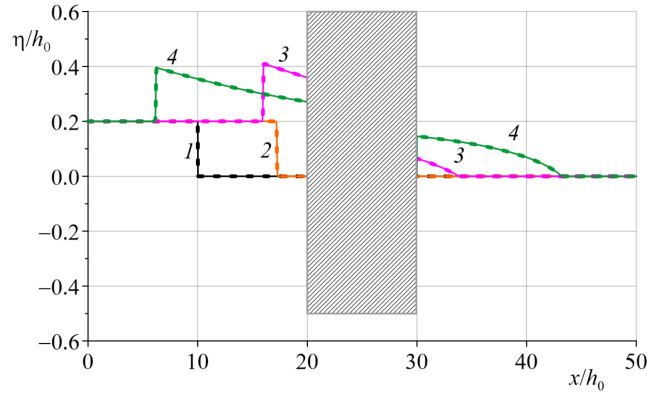


Рис. 3. Взаимодействие бора с полупогруженным телом: профили свободной поверхности, рассчитанные в рамках 1DNSWE- и 2DNSWE-моделей (штриховые и сплошные линии соответственно) для моментов времени $t\sqrt{g/h_0} = 0$ (1); 6.26 (2); 12.52 (3); 21.91 (4)

Fig. 3. Interaction of the bore with the semi-immersed body: free surface profiles calculated using 1DNSWE and 2DNSWE models (dashed and solid lines, respectively) for the time $t\sqrt{g/h_0} = 0$ (1); 6.26 (2); 12.52 (3); 21.91 (4)

так и в процессе его взаимодействия с полупогруженным телом (линии 3, 4) соответствующие профили свободной границы набегающей, отраженной от тела и прошедшей за него волн визуально неразличимы, что может свидетельствовать о достаточной точности предложенного 2D-алгоритма.

3.2. Накат уединенной волны на полупогруженное тело

Рассматривается задача о накате на полупогруженную конструкцию уединенной волны, заданной в начальный момент времени формулами

$$\eta(\mathbf{x}, 0) = a_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x_1 - x_1^0}{2h_0} \sqrt{\frac{3a_0}{a_0 + h_0}} \right), \quad u_1(\mathbf{x}, 0) = c_0 \frac{\eta(\mathbf{x}, 0)}{H(\mathbf{x}, 0)}, \quad u_2(\mathbf{x}, 0) \equiv 0,$$

где $0 < a_0$ — амплитуда волны, $x_1 = x_1^0$ — начальное положение ее вершины, $0 < x_1^0 < x_{1l}$, $c_0 = \sqrt{g(a_0 + h_0)}$, $H = h_0 + \eta$. Таким образом, как и в задаче из подразд. 3.1, начальная волна является “одномерной” (ее параметры не зависят от координаты x_2) с фронтом, параллельным оси Ox_2 . Однако в приведенном здесь примере с входными значениями параметров

$$l_1 = l_2 = 90h_0, \quad x_{1l} = x_{2l} = 40h_0, \quad x_{1r} = x_{2r} = 50h_0, \quad d_0 = -0.5h_0, \quad a_0 = 0.05h_0, \quad x_1^0 = 20h_0$$

процесс взаимодействия волны с полупогруженным телом характеризуется сильной деформацией формы волны и значительными двумерными эффектами (рис. 4), в частности, фронты как отраженной, так и прошедшей волн являются криволинейными.

Картина взаимодействия уединенной волны с полупогруженным телом прямоугольной формы оказывается весьма схожей с той, которая наблюдается в лабораторных [25] и численных [26, 27] экспериментах по изучению наката уединенной волны на остров конической формы. Более того, аналогично случаю кругового конического острова для тела прямоугольной формы экстремальные значения заплесков наблюдаются не только на лицевой грани ($x_1 = x_{1l}$), но и на тыльной ($x_1 = x_{1r}$). Анализ результатов расчетов показывает, что волны, пройдя около тела вдоль его боковых сторон (рис. 4, б), образуют встречные потоки за тыльной гранью, которые при столкновении генерируют

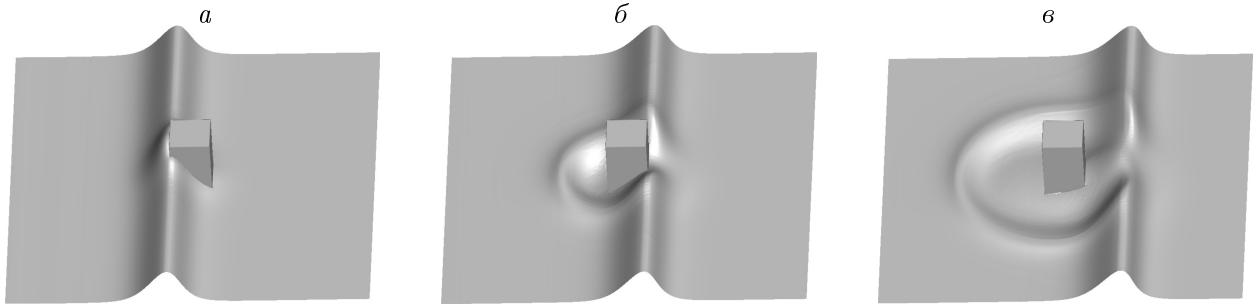


Рис. 4. Форма свободной поверхности $y = \eta(\mathbf{x}, t)$ в различные моменты времени: $t\sqrt{g/h_0} = 18.79$ (а); 28.19 (б); 37.58 (в)

Fig. 4. The shape of the free surface $y = \eta(\mathbf{x}, t)$ at various time moments: $t\sqrt{g/h_0} = 18.79$ (а); 28.19 (б); 37.58 (в)

возвышение свободной поверхности, заметно превосходящее высоту прошедшей волны. В результате распада этого возвышения образуются две новые волны, одна из которых набегаёт на тыльную грань с экстремальным заплеском в её центре ($x_2 = 45h_0$), а другая сносится вправо потоком, вытекающим из-под тела. В отличие от задачи с островом конической формы, в рассматриваемой здесь задаче максимальные значения заплесков на тыльной грани не превышали максимальных значений на лицевой.

Результаты расчетов на последовательностях измельчающихся сеток указывают на сходимость численного решения. В качестве примера, подтверждающего это свойство численного алгоритма, на рис. 5 показаны хронограммы свободной поверхности в точках установки волномеров В1–В4:

$$B_1 = (20h_0, 45h_0), \quad B_2 = (40h_0, 45h_0), \quad B_3 = (40h_0, 40h_0), \quad B_4 = (50h_0, 45h_0).$$

Графики, рассчитанные на квадратной сетке с шагом h_0 , изображены штрих-пунктирными линиями, с шагом $h_0/2$ — пунктирными, $h_0/4$ — сплошными. Хронограммы для шага $h_0/8$, т. е. для сетки с числом ячеек $N_1 \times N_2 = 720 \times 720$, не приведены, поскольку они визуально неотличимы от полученных в расчетах с шагом $h_0/4$.

По приведенным на рис. 5 хронограммам можно также видеть, что максимальный заплеск в центре лицевой грани (волномер В2) превышает амплитуду набегающей волны и больше максимального заплеска в центре тыльной грани (волномер В4), который, в свою очередь, меньше, чем a_0 . По хронограмме, рассчитанной для волномера В1, видно, что амплитуда отраженной волны меньше амплитуды набегающей. Сравнивая хронограммы волномеров В2 и В3, можно видеть, что значения максимальных заплесков вдоль лицевой грани распределены неравномерно, в частности в центре (волномер В2) максимальный заплеск больше, чем в угловой точке тела (волномер В3). Этот факт также демонстрирует отличие результатов моделирования в рамках плановой модели от результатов решения той же задачи с использованием моделей одномерных течений.

Отметим еще одно свойство разработанного алгоритма, которое выявилось в ходе тестирования: нарушение закона сохранения (дисбаланс) массы во внутренней области. Поясним суть этого свойства.

Из уравнения неразрывности (7) следует соотношение

$$0 = \iint_{\mathcal{D}^i} \rho \nabla \cdot (S\mathbf{u}) dx_1 dx_2 = \oint_{\Gamma} \rho S(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\tau \equiv \delta(t),$$

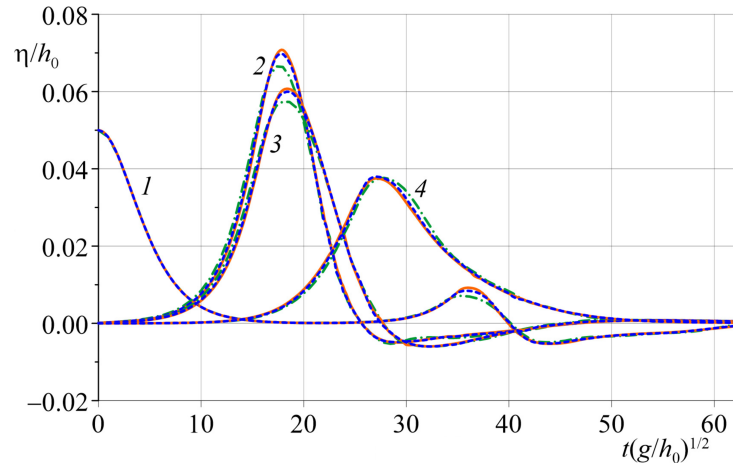


Рис. 5. Хронограммы свободной поверхности в точках установки волномеров В1–В4 (линии 1–4 соответственно), полученные в расчетах на квадратных сетках с шагами, равными h_0 (штрихпунктир); $h_0/2$ (пунктир); $h_0/4$ (сплошные линии)

Fig. 5. Chronograms of the free surface recorded by the virtual gauges В1–В4 (lines 1–4, respectively), obtained in calculations on square grids with steps equal to h_0 (dashed line); $h_0/2$ (dotted line); $h_0/4$ (solid lines)

означающее выполнение закона сохранения массы $\delta(t) \equiv 0$ для внутренней области \mathcal{D}^i : масса воды, втекающей через границу Γ под тело, равна массе вытекающей, как и должно быть для несжимаемой жидкости. Если разностные уравнения (28) решаются точно, то закон сохранения массы будет выполняться и для сеточных функций. В самом деле, в приграничных ячейках внутренней области \mathcal{D}^i , в том числе и в ячейках, прилегающих к углам этой области, разностное уравнение неразрывности (33) выполняется точно (см. подразд. 2.3). Если во внутренних узлах $\mathbf{x}_j \in \mathcal{D}_h^i$ уравнение для давления (26) удовлетворяется, то в таких узлах уравнение (33) также будет точным. Умножая каждое уравнение неразрывности на площадь элементарной ячейки, соответствующей узлу $\mathbf{x}_j \in \mathcal{D}_h^i \cup \Gamma_h$ (границы элементарных ячеек изображены штриховыми линиями на рис. 2), складывая результаты и учитывая взаимное сокращение выражений на смежных сторонах соседних ячеек, получим разностный аналог закона баланса массы $\delta^{n+1} \equiv 0$, где

$$\begin{aligned} \delta^{n+1} = & \sum_{j_2=j_{2l}+1}^{j_{2r}-1} [(Su_1^{n+1})_{j_{1r},j_2} - (Su_1^{n+1})_{j_{1l},j_2}] h_2 + \sum_{j_1=j_{1l}+1}^{j_{1r}-1} [(Su_2^{n+1})_{j_1,j_{2r}} - (Su_2^{n+1})_{j_1,j_{2l}}] h_1 + \\ & + [(Su_1^{n+1})_{j_{1r},j_{2l}} + (Su_1^{n+1})_{j_{1r},j_{2r}} - (Su_1^{n+1})_{j_{1l},j_{2l}} - (Su_1^{n+1})_{j_{1l},j_{2r}}] \frac{h_2}{2} + \\ & + [(Su_2^{n+1})_{j_{1l},j_{2r}} + (Su_2^{n+1})_{j_{1r},j_{2r}} - (Su_2^{n+1})_{j_{1l},j_{2l}} - (Su_2^{n+1})_{j_{1r},j_{2l}}] \frac{h_1}{2}. \end{aligned}$$

В реальных вычислениях система разностных уравнений (28) решалась приближенно с помощью итерационного метода последовательной верхней релаксации, при этом итерационный процесс прекращался, когда равномерная норма разности двух последовательных приближений становилась меньше заданного числа $\varepsilon > 0$. Вследствие остановки итерационного процесса до момента полной сходимости уравнение для давления (26) не будет удовлетворяться, поэтому уравнение неразрывности (33) во внутренних узлах $\mathbf{x}_j \in \mathcal{D}_h^i$, умноженное на площадь элементарной ячейки, будет выполняться лишь приближенно с некоторой невязкой ψ_j^{n+1} :

Максимальные значения дисбаланса массы во внутренней области в расчетах на различных сетках и различных значениях числа ε из критерия останова итерационного процесса вычисления давления

The maximum values of the mass disbalance in the inner region for the calculations performed using the various grids and different values of the number ε from the criterion for stopping the iterative process of calculating pressure

Шаг сетки	Размер сетки	$\max_n \delta^n $				
		$\varepsilon = 10^{-8}$	$\varepsilon = 10^{-9}$	$\varepsilon = 10^{-10}$	$\varepsilon = 10^{-11}$	$\varepsilon = 10^{-12}$
$h_0/2$	180×180	$2.94 \cdot 10^{-8}$	$1.86 \cdot 10^{-9}$	$2.08 \cdot 10^{-10}$	$1.57 \cdot 10^{-11}$	$1.55 \cdot 10^{-12}$
$h_0/4$	360×360	$2.58 \cdot 10^{-8}$	$2.32 \cdot 10^{-9}$	$2.09 \cdot 10^{-10}$	$1.03 \cdot 10^{-11}$	$0.87 \cdot 10^{-12}$
$h_0/8$	720×720	$3.79 \cdot 10^{-8}$	$5.84 \cdot 10^{-9}$	$4.53 \cdot 10^{-10}$	$5.90 \cdot 10^{-11}$	$2.58 \cdot 10^{-12}$

$$+ \left[\frac{(Su_1^{n+1})_B + (Su_1^{n+1})_C}{2} - \frac{(Su_1^{n+1})_A + (Su_1^{n+1})_D}{2} \right] h_2 + \left[\frac{(Su_2^{n+1})_D + (Su_2^{n+1})_C}{2} - \frac{(Su_2^{n+1})_A + (Su_2^{n+1})_B}{2} \right] h_1 = \psi_j^{n+1}.$$

При суммировании таких уравнений вместо ожидаемого баланса массы будем иметь дисбаланс $\delta^{n+1} \neq 0$.

В таблице приведены максимальные значения дисбаланса, возникающие при решении задачи о накате уединенной волны на полупогруженное тело. Видно, что эти значения малы, слабо зависят от размера сетки и могут быть уменьшены за счет выбора малых значений числа ε из критерия сходимости итерационного процесса расчета давления.

Заключение

Разработан численный алгоритм для расчета взаимодействия длинных поверхностных волн с полупогруженными неподвижными телами в рамках плановой бездисперсионной модели мелкой воды. Детально изложены особенности используемых численных методов и алгоритма, основанного на разбиении области течения на внешнюю часть, где имеет место течение воды со свободной границей, и внутреннюю область с течением несжимаемой жидкости в пространстве между днищем полупогруженного тела и дном акватории. Во внешней области для расчета полной глубины и осредненной по толщине жидкого слоя скорости предлагается использовать схему предиктор-корректор. Во внутренней области, где искомыми величинами являются давление и вектор скорости, метод расчета основан на модифицированной схеме Мак-Кормака, при применении которой производится расщепление по физическим процессам: вначале решается уравнение движения с исключенным давлением, затем решается краевая задача для уравнения Пуассона относительно давления и на последнем этапе вновь решается уравнение движения с градиентом найденного давления, но без конвективных членов. Предложен алгоритм реализации условий сопряжения, позволяющий склеивать численные решения на общей границе внешней и внутренней областей.

Приведены первые результаты тестирования разработанного алгоритма. На плановых задачах о накате бора и уединенной волны на полупогруженное тело в форме прямоугольной призмы оценена точность алгоритма, показана сходимость численных решений при измельчении сетки, а также установлено качественное отличие картин взаимодействия волн с полупогруженным телом, полученных в рамках плановой модели, от результатов моделирования на основе моделей в одномерном приближении.

Дальнейшее развитие видится в разработке численного алгоритма расчета воздействия длинных поверхностных волн на полупогруженные сооружения в рамках плановой модели Серре–Грина–Нагди, учитывающей дисперсию поверхностных волн. На основе сравнений с результатами расчетов по другим моделям планируется оценить целесообразность использования плановых моделей мелкой воды для решения обозначенного круга задач.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для Федерального исследовательского центра информационных и вычислительных технологий. Авторы выражают глубокую признательность анонимным рецензентам за ценные замечания.

Приложение. Расчетные формулы в угловых узлах внутренней области

В разд. 2 приведены формулы (18), (44), (45) для расчета в одном из угловых узлов высоты свободной поверхности и компонент вектора скорости. Аналогичные формулы можно получить и в других угловых узлах, причем их можно записать в единообразной форме для всех четырех угловых узлов $\mathbf{x}_j \in \Gamma_h$ ($\mathbf{j} = (j_1, j_2)$, $j_1 = j_{1l}$, $j_1 = j_{1r}$, $j_2 = j_{2l}$, $j_2 = j_{2r}$), если использовать “индикаторы”

$$k_1 = \begin{cases} -1, & \text{если } j_1 = j_{1l}, \\ 1, & \text{если } j_1 = j_{1r}, \end{cases} \quad k_2 = \begin{cases} -1, & \text{если } j_2 = j_{2l}, \\ 1, & \text{если } j_2 = j_{2r}. \end{cases}$$

Тогда формулы (18), (39) являются частными случаями следующих, общих для всех четырех углов:

$$n_1 = k_1 \frac{h_2}{\bar{h}}, \quad n_2 = k_2 \frac{h_1}{\bar{h}}, \quad \tau_1 = -n_2, \quad \tau_2 = n_1, \quad \bar{h} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2},$$

$$\eta_j^{n+1} = \frac{\eta_{j_1+k_1, j_2}^{n+1} + \zeta^2 \eta_{j_1+k_1, j_2+k_2}^{n+1} + \zeta^4 \eta_{j_1, j_2+k_2}^{n+1}}{1 + \zeta^2 + \zeta^4}, \quad \zeta = \frac{h_1}{h_2}.$$

Выражения для Q_j и T_j в формулах (40)–(42) в общем случае принимают вид

$$Q_j = \mathbf{n} \cdot (S\mathbf{u}^{n+1})_{j_1-k_1/2, j_2-k_2/2},$$

$$T_j = \begin{cases} \frac{(\mathbf{u}_{j_1+k_1, j_2}^{n+1} + \zeta^2 \mathbf{u}_{j_1+k_1, j_2+k_2}^{n+1} + \zeta^4 \mathbf{u}_{j_1, j_2+k_2}^{n+1}) \cdot \boldsymbol{\tau}}{1 + \zeta^2 + \zeta^4}, & \text{если } Q_j \leq 0, \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}_{j_1-k_1/2, j_2-k_2/2}^{n+1}, & \text{если } Q_j > 0. \end{cases}$$

Формулы (44), (45) для компонент скорости остаются верными и в общем случае.

Список литературы

- [1] Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B. Numerical investigation of the wave force on a partially immersed rectangular structure: long waves over a flat bottom. Ocean Engineering. 2021; (221):Article 108540. DOI:10.1016/j.oceaneng.2020.108540.

- [2] **Гусев О.И., Скиба В.С., Хакимзянов Г.С.** Силовое воздействие длинных поверхностных волн на полупогруженное в воду тело. I. Влияние формы набегающей волны. Вычислительные технологии. 2022; 27(4):33–62. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.004.
- [3] **Гусев О.И., Скиба В.С., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б.** Численное моделирование воздействия крутых волн на полупогруженные сооружения. Вестник Башкирского университета. 2022; 27(3):496–501. DOI:10.33184/bulletin-bsu-2022.3.1.
- [4] **Khakimzyanov G.S., Dutykh D., Gusev O.I.** Long wave interaction with a partially immersed body. Part II: Numerical results. arXiv preprint. arXiv:2204.08210v1. DOI:10.48550/arXiv.2204.08210.
- [5] **Гусев О.И., Скиба В.С., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б.** Влияние неровности дна на характеристики взаимодействия уединенной волны с полупогруженным телом прямоугольного сечения. Прикладная механика и техническая физика. 2023; 64(1):60–75.
- [6] **Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Skiba V.S., Chubarov L.B.** Shallow water modeling of wave-structure interaction over irregular bottom. Ocean Engineering. 2023; (267):Article 113284. DOI:10.1016/j.oceaneng.2022.113284.
- [7] **Park J.-C., Kim M.-H., Miyata H.** Three-dimensional numerical wave tank simulations on fully nonlinear wave–current–body interactions. Journal of Marine Science and Technology. 2001; 6(2):70–82.
- [8] **Lin P.** A multiple-layer σ -coordinate model for simulation of wave–structure interaction. Computers & Fluids. 2006; 35(2):147–167.
- [9] **Orzech M.D., Shi F., Veeramony J., Bateman S., Calantoni J., Kirby J.T.** Incorporating floating surface objects into a fully dispersive surface wave model. Ocean Modelling. 2016; (102):14–26.
- [10] **Ma G., Farahani A.A., Kirby J.T., Shi F.** Modeling wave–structure interactions by an immersed boundary method in a σ -coordinate model. Ocean Engineering. 2016; (125):238–247.
- [11] **Sun J.L., Wang C.Z., Wu G.X., Khoo B.C.** Fully nonlinear simulations of interactions between solitary waves and structures based on the finite element method. Ocean Engineering. 2015; (108):202–215.
- [12] **Chang C.-H., Wang K.-H., Hseih P.-C.** Fully nonlinear model for simulating solitary waves propagating through a partially immersed rectangular structure. Journal of Coastal Research. 2017; 33(6):1487–1497.
- [13] **Chen Y.-H., Wang K.-H.** Experiments and computations of solitary wave interaction with fixed, partially submerged, vertical cylinders. Journal of Ocean Engineering and Marine Energy. 2019; 5(2):189–204.
- [14] **Lu X., Wang K.-H.** Modeling a solitary wave interaction with a fixed floating body using an integrated analytical-numerical approach. Ocean Engineering. 2015; (109):691–704.
- [15] **Нуднер И.С., Урусов А.И., Хакимзянов Г.С., Яньшин В.Н.** К воздействию длинных волн на частично заглубленные объекты. Моделирование в механике. 1992; 6(1):81–86.
- [16] **Khakimzyanov G.S.** Numerical simulation of the interaction of a solitary wave with a partially immersed body. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2002; 17(2):145–158.
- [17] **Khakimzyanov G.S., Dutykh D.** Long wave interaction with a partially immersed body. Part I: Mathematical models. Communications in Computational Physics. 2020; 27(2):321–378.
- [18] **Lannes D.** On the dynamics of floating structures. Annals of PDE. 2017; 3(1):Article 11.

- [19] Bosi U., Engsig-Karup A.P., Eskilsson C., Ricchiuto M. A spectral/hp element depth-integrated model for nonlinear wave–body interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2019; (348):222–249.
- [20] Bresch D., Lannes D., Metivier G. Waves interacting with a partially immersed obstacle in the Boussinesq regime. *Analysis & PDE*. 2021; 14(4):1085–1124.
- [21] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С., Гусев О.И., Шокина Н.Ю. Нелинейно-дисперсионные модели волновой гидродинамики: уравнения и численные алгоритмы. Новосибирск: Наука; 2017: 456.
- [22] Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Gusev O. Dispersive shallow water waves. Theory, modeling, and numerical methods. *Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing*. Basel: Birkhäuser; 2020: 284.
- [23] Chorin A.J. Numerical solution of the Navier–Stokes equations. *Mathematics of Computation*. 1968; (22):745–762.
- [24] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир; 1980: 618.
- [25] Briggs M.J., Synolakis C.E., Harkins G.S., Green D.R. Laboratory experiments of tsunami runup on circular island. *Pure and Applied Geophysics*. 1995; 144(3/4):569–593.
- [26] Chubarov L.B., Fedotova Z.I., Shkuropatskii D.A. Investigation of computational models of long surface waves in the problem of interaction of a solitary wave with a conic island. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 1998; 13(4):289–306.
- [27] Гусев О.И. Алгоритм расчета поверхностных волн над подвижным дном в рамках плановой нелинейно-дисперсионной модели. *Вычислительные технологии*. 2014; 19(6):19–41.

Numerical algorithm for calculating the interaction of surface waves with semi-immersed structures in the framework of the 2D shallow water model

O. I. GUSEV*, G. S. KHAKIMZYANOV

Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia

*Corresponding author: Oleg I. Gusev, e-mail: GusevOI@ict.sbras.ru

Received April 07, 2023, revised June 15, 2023, accepted July 02, 2023.

Abstract

Purpose. When designing large partially immersed fixed structures located in tsunami-hazardous coastal waters, it is necessary to consider the possible impact of long surface waves such as tsunamis on them. Multivariate calculations make the application of algorithms for three-dimensional models (Navier–Stokes or Euler) computationally expensive. The most important characteristics of the interaction of waves with a semi-immersed body can often be obtained using shallow water (SW) models, which is confirmed by recent studies in the framework of one-dimensional (1D) SW models. However, numerical algorithms and calculation results in a two-dimensional (2D) formulation have not yet been published, even in the case of the dispersionless SW model. The development of such an algorithm has become the purpose of this study.

Methodology. The algorithm for calculating the interaction of surface waves with fixed semi-immersed structures in the framework of the 2D dispersionless shallow water model is described in

detail. For the numerical solution of the problem, the flow area is divided into two parts. The system of the shallow water equations for a flow with a free boundary is solved in the outer domain using the predictor-corrector scheme. In the inner region, the system of incompressible fluid equations for flow in the space between the bottom of a semi-immersed body and the bottom of the basin is solved using a modified McCormack scheme. A method of gluing these solutions at the boundary of the body is proposed.

Results and conclusions. The first results of testing the developed algorithm are presented. The accuracy of the algorithm is estimated on the 2D problems of the impact of a bore and a solitary wave on a semi-immersed body in the form of a rectangular prism. The convergence of numerical solutions is confirmed when the grid is refined. We reveal the qualitative difference between the characteristics of wave-structure interaction obtained within the framework of the 2D and 1D models.

Keywords: surface waves, semi-immersed body, 2D shallow water model, compatibility conditions, difference schemes, numerical algorithm.

Citation: Gusev O.I., Khakimzyanov G.S. Numerical algorithm for calculating the interaction of surface waves with semi-immersed structures in the framework of the 2D shallow water model. Computational Technologies. 2023; 28(4):73–93. DOI:10.25743/ICT.2023.28.4.007. (In Russ.)

Acknowledgements. The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation for Federal Research Center for Information and Computational Technologies.

References

1. **Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B.** Numerical investigation of the wave force on a partially immersed rectangular structure: long waves over a flat bottom. *Ocean Engineering*. 2021; (221):Article 108540. DOI:10.1016/j.oceaneng.2020.108540.
2. **Gusev O.I., Skiba V.S., Khakimzyanov G.S.** Force impact of long surface waves on a body semi-immersed in water. I. Influence of the waveform. *Computational Technologies*. 2022; 27(4):33–62. DOI:10.25743/ICT.2022.27.4.004. (In Russ.)
3. **Gusev O.I., Skiba V.S., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B.** Numerical modeling of the impact of steep waves on partially immersed structures. *Vestnik Bashkirskogo Universiteta*. 2022; 27(3):496–501. DOI:10.33184/bulletin-bsu-2022.3.1. (In Russ.)
4. **Khakimzyanov G.S., Dutykh D., Gusev O.I.** Long wave interaction with a partially immersed body. Part II: Numerical results. arXiv preprint. arXiv:2204.08210v1. DOI:10.48550/arXiv.2204.08210.
5. **Gusev O.I., Skiba V.S., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B.** Influence of bottom irregularity on solitary-wave interaction with a partially immersed rectangular body. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2023; 64(1):50–63.
6. **Gusev O.I., Khakimzyanov G.S., Skiba V.S., Chubarov L.B.** Shallow water modeling of wave-structure interaction over irregular bottom. *Ocean Engineering*. 2023; (267):Article 113284. DOI:10.1016/j.oceaneng.2022.113284.
7. **Park J.-C., Kim M.-H., Miyata H.** Three-dimensional numerical wave tank simulations on fully nonlinear wave–current–body interactions. *Journal of Marine Science and Technology*. 2001; 6(2):70–82.
8. **Lin P.** A multiple-layer σ -coordinate model for simulation of wave–structure interaction. *Computers & Fluids*. 2006; 35(2):147–167.
9. **Orzech M.D., Shi F., Veeramony J., Bateman S., Calantoni J., Kirby J.T.** Incorporating floating surface objects into a fully dispersive surface wave model. *Ocean Modelling*. 2016; (102):14–26.
10. **Ma G., Farahani A.A., Kirby J.T., Shi F.** Modeling wave–structure interactions by an immersed boundary method in a σ -coordinate model. *Ocean Engineering*. 2016; (125):238–247.
11. **Sun J.L., Wang C.Z., Wu G.X., Khoo B.C.** Fully nonlinear simulations of interactions between solitary waves and structures based on the finite element method. *Ocean Engineering*. 2015; (108):202–215.
12. **Chang C.-H., Wang K.-H., Hseih P.-C.** Fully nonlinear model for simulating solitary waves propagating through a partially immersed rectangular structure. *Journal of Coastal Research*. 2017; 33(6):1487–1497.

13. **Chen Y.-H., Wang K.-H.** Experiments and computations of solitary wave interaction with fixed, partially submerged, vertical cylinders. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. 2019; 5(2):189–204.
14. **Lu X., Wang K.-H.** Modeling a solitary wave interaction with a fixed floating body using an integrated analytical-numerical approach. *Ocean Engineering*. 2015; (109):691–704.
15. **Nudner I.S., Urusov A.I., Khakimzyanov G.S., Yanshin V.N.** On the effect of long waves on partially immersed objects. *Modelling in Mechanics*. 1992; 6(1):81–86. (In Russ.)
16. **Khakimzyanov G.S.** Numerical simulation of the interaction of a solitary wave with a partially immersed body. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2002; 17(2):145–158.
17. **Khakimzyanov G.S., Dutykh D.** Long wave interaction with a partially immersed body. Part I: Mathematical models. *Communications in Computational Physics*. 2020; 27(2):321–378.
18. **Lannes D.** On the dynamics of floating structures. *Annals of PDE*. 2017; 3(1):Article 11.
19. **Bosi U., Engsig-Karup A.P., Eskilsson C., Ricchiuto M.** A spectral/hp element depth-integrated model for nonlinear wave–body interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2019; (348):222–249.
20. **Bresch D., Lannes D., Metivier G.** Waves interacting with a partially immersed obstacle in the Boussinesq regime. *Analysis & PDE*. 2021; 14(4):1085–1124.
21. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Gusev O.I., Shokina N.Yu.** Nelineynno-dispersionnyye modeli volnovoy gidrodinamiki: uravneniya i chislennyye algoritmy [Nonlinear dispersive models of wave hydrodynamics: equations and numerical algorithms]. Novosibirsk: Nauka; 2017: 456. (In Russ.)
22. **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Gusev O.** Dispersive shallow water waves. Theory, modeling, and numerical methods. *Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing*. Basel: Birkhäuser; 2020: 284.
23. **Chorin A.J.** Numerical solution of the Navier–Stokes equations. *Mathematics of Computation*. 1968; (22):745–762.
24. **Roache P.J.** Computational fluid dynamics. Albuquerque: Hermosa Publisher; 1976: 446.
25. **Briggs M.J., Synolakis C.E., Harkins G.S., Green D.R.** Laboratory experiments of tsunami runup on circular island. *Pure and Applied Geophysics*. 1995; 144(3/4):569–593.
26. **Chubarov L.B., Fedotova Z.I., Shkuropatskii D.A.** Investigation of computational models of long surface waves in the problem of interaction of a solitary wave with a conic island. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 1998; 13(4):289–306.
27. **Gusev O.I.** Algorithm for surface waves calculation above a movable bottom within the frame of plane nonlinear dispersive model. *Computational Technologies*. 2014; 19(6):19–41. (In Russ.)